/ /

وبنفس الطريقة نثبت أن (2) ... $b \leq a$

من (1) و (2) تنتج المساواة.

4- لدينا من ... أن: (1) ... $x \wedge (x \vee y) \leq x$

وبما أن $x \leq x$ و $x \leq x \vee y$

هنا يكون x هو حد أدنى للعنصرين $x, x \vee y$ ومنه:

$x \leq x \wedge (x \vee y)$ ... (2)

من (1) و (2) تنتج المساواة.

مبرهنة: لتكن الشبكة $(E, \leq, \vee, \wedge)$ ، a, b عنصرين ما من الشبكة

عندئذٍ فإن:

1- $a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b$

2- $a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a$

البرهان: واجب.

الثلاثاء 2017/10/24 . المحاضرة الرابعة

مبرهنة: إذا كانت E مجموعة ما في العمليتين الثنائيتين $\wedge$ ، $\vee$ ، بحيث تحقق الشروط 11 ← 14

وهي الخواص الجبرية للشبكات (اللانمو - التبديلية - التجميعية - الامتصاص). عندئذٍ: [دون برهان]

توجد علاقة ترتيب جزئي وحيدة $\leq$ على المجموعة E بحيث تكون $(E, \leq, \vee, \wedge)$ شبكة.

الشبكات الجزئية:

لتكن $(E, \leq, \vee, \wedge)$ شبكة ما ولتكن $S \subseteq E$ ، عندئذٍ نقول عن S أنها شبكة جزئية من E إذا حققت عناصرها جميع الشروط الشبكة

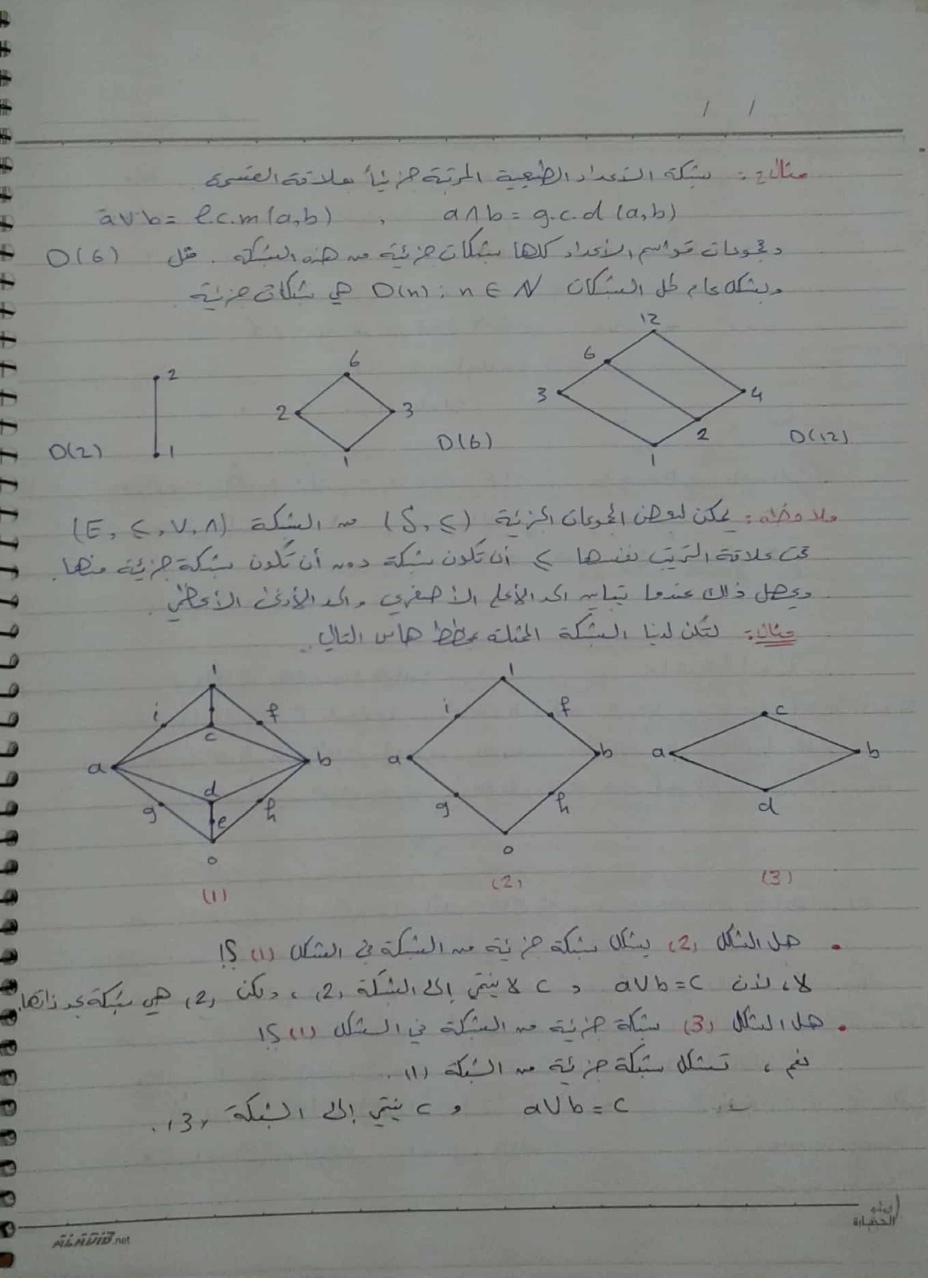
- ينتج من التعريف: إذا كانت S مجموعة جزئية من شبكة ما E عندئذٍ فإن S تكون شبكة جزئية من E إذا وفقط إذا تحقق $\forall x, y \in S : x \vee y \in S$ & $x \wedge y \in S$

مثال 1: مجموعة الأعداد الطبيعية شبكة جزئية من مجموعة الأعداد الصحيحة

$(\mathbb{N}, \leq, \vee, \wedge) \subseteq (\mathbb{Z}, \leq, \vee, \wedge) \subseteq (\mathbb{Q}, \leq, \vee, \wedge) \subseteq (\mathbb{R}, \leq, \vee, \wedge)$

مع علاقة الترتيب الطبيعي . في هذه الحالة يكون $\sup = \max$

$\inf = \min$



/ /

مثال: شبكة الأعداد الطبيعية المرتبة جزئياً بعلاقة القسمة

$a \vee b = l.c.m(a,b)$, $a \wedge b = g.c.d(a,b)$

ومجموعات قواسم الأعداد كلها شبكات جزئية من هذه الشبكة. مثل $D(6)$

وبشكل عام كل الشبكات $D(n) : n \in N$ هي شبكات جزئية

ملاحظة: يمكن لبعض المجموعات الجزئية $(S, \leq)$ من الشبكة $(E, \leq, \vee, \wedge)$ تحت علاقة الترتيب نفسها $\leq$ أن تكون شبكة دون أن تكون شبكة جزئية منها. ويحصل ذلك عندما تتباين الحد الأعلى الأصغري، والحد الأدنى الأعظمي.

مثال: لتكن لدينا الشبكة الممثلة بمخطط هاس التالي.

- هل الشكل (2) يشكل شبكة جزئية من الشبكة في الشكل (1)؟

لا، لأن $a \vee b = c$ و c لا ينتمي إلى الشبكة (2)، ولكن (2) هي شبكة بحد ذاتها.

- هل الشكل (3) شبكة جزئية من الشبكة في الشكل (1)؟

نعم، تشكل شبكة جزئية من الشبكة (1).

لأن $a \vee b = c$ و c ينتمي إلى الشبكة (3).

الجداء المباشر للشبكات :

تعريف: إذا كانت $(E_1,\le)$ ، $(E_2,\le)$ مجموعتين مرتبتين جزئياً ، عندئذٍ نسمي مجموعة جميع الأزواج المرتبة (x,y) التي مساقطها الأولى من E_1 ، ومساقطها الثانية من E_2 ، والتي تحقق الشرط:
$(x_1,y_1) \le (x_2,y_2) \iff x_1 \le x_2 \;\&\; y_1 \le y_2$
الجداء المباشر للمجموعات المرتبة جزئياً $E_1 \times E_2$.

مبرهنة: إن الجداء المباشر لأي شبكتين $(E_1,\le,\vee,\wedge)$ ، $(E_2,\le,\vee,\wedge)$ هو شبكة
حيث:

1) $(a_1,b_1) \le (a_2,b_2) \iff a_1 \le a_2 \;\&\; b_1 \le b_2$
2) $(a_1,b_1) \vee (a_2,b_2) = (a_1 \vee a_2 \,,\, b_1 \vee b_2)$
3) $(a_1,b_1) \wedge (a_2,b_2) = (a_1 \wedge a_2 \,,\, b_1 \wedge b_2)$

وذلك $\forall\, a_1,a_2 \in E_1 \,,\, \forall\, b_1,b_2 \in E_2$

الإثبات: وجدنا حسب التعريف السابق أن $(E_1 \times E_2,\le)$ مجموعة مرتبة جزئياً
سوف نثبت أنه لأي عنصرين $(a_1,b_1),(a_2,b_2) \in E_1 \times E_2$:

$(a_1,b_1) \vee (a_2,b_2) = (a_1 \vee a_2 \,,\, b_1 \vee b_2)$ ---(1)

$(a_1,b_1) \wedge (a_2,b_2) = (a_1 \wedge a_2 \,,\, b_1 \wedge b_2)$ ---(2)

لنثبت (1) نضع: $(d_1,d_2) = (a_1,b_1) \vee (a_2,b_2)$

عندها نجد: $(a_1,b_1) \le (d_1,d_2) \;\&\; (a_2,b_2) \le (d_1,d_2)$

$\Rightarrow a_1 \le d_1 \;\&\; a_2 \le d_1 \;,\; b_1 \le d_2 \;\&\; b_2 \le d_2$

حسب تعريف الحد الأعلى الأصغري فإن d_1 هو حد أعلى أصغري لـ a_1,a_2
و d_2 = = = لـ b_1,b_2

$\Rightarrow a_1 \vee a_2 \le d_1 \;\&\; b_1 \vee b_2 \le d_2 \Rightarrow (a_1 \vee a_2 \,,\, b_1 \vee b_2) \le (d_1,d_2)$ ---(أ)

كما أن:

$a_1 \le a_1 \vee a_2 \,,\, b_1 \le b_1 \vee b_2 \,,\, a_2 \le a_1 \vee a_2 \,,\, b_2 \le b_1 \vee b_2$

$\Rightarrow (a_1,b_1) \le (a_1 \vee a_2 \,,\, b_1 \vee b_2) \,,\, (a_2,b_2) \le (a_1 \vee a_2 \,,\, b_1 \vee b_2)$

$\Rightarrow (d_1,d_2) = (a_1,b_1) \vee (a_2,b_2) \le (a_1 \vee a_2 \,,\, b_1 \vee b_2)$ ---(ب)

من (أ) ، (ب) ينتج المساواة.

(2) ينتج بنفس الطريقة تماماً.

وبذلك نكون قد برهنا أن الجداء المباشر لأي شبكتين هو شبكة.

مثال: ليكن لدينا المجموعات التالية:

$U = \{a_1, a_2\}$, $P = \{\Phi, \{a_1\}\}$, $Q = \{\Phi, \{a_2\}\}$

والمطلوب: بين أن كل من $(P, \subseteq, \cup, \cap)$ ، $(Q, \subseteq, \cup, \cap)$ شبكة.

ثم أوجد الشبكة $P \times Q$ ، الشبكة $P \times P \times P$. وارسم مخطط هاس لها

الحل: لدينا P ، Q شبكات.

$$P \times Q = \{(\Phi, \Phi), (\Phi, \{a_2\}), (\{a_1\}, \Phi), (\{a_1\}, \{a_2\})\}$$

$$P \times P \times P = \{(\Phi, \Phi, \Phi), (\Phi, \Phi, \{a_1\}), (\Phi, \{a_1\}, \Phi), (\{a_1\}, \Phi, \Phi), (\Phi, \{a_1\}, \{a_1\}), (\{a_1\}, \Phi, \{a_1\}), (\{a_1\}, \{a_1\}, \Phi), (\{a_1\}, \{a_1\}, \{a_1\})\}$$

مخطط هاس:

$(\{a_1\}, \{a_1\}, \{a_1\})$
$(\{a_1\}, \{a_1\}, \Phi)$ $(\Phi, \{a_1\}, \{a_1\})$ $(\{a_1\}, \Phi, \{a_1\})$
$(\Phi, \{a_1\}, \Phi)$ $(\Phi, \Phi, \{a_1\})$ $(\{a_1\}, \Phi, \Phi)$
(Φ, Φ, Φ)

$P \times P \times P$

$(\{a_1\}, \{a_2\})$
$(\Phi, \{a_2\})$ $(\{a_1\}, \Phi)$
(Φ, Φ)

$P \times Q$

ملاحظة: في أية شبكة $(E, \leq, \vee, \wedge)$ يتحقق ما يلي:

1) $x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

2) $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

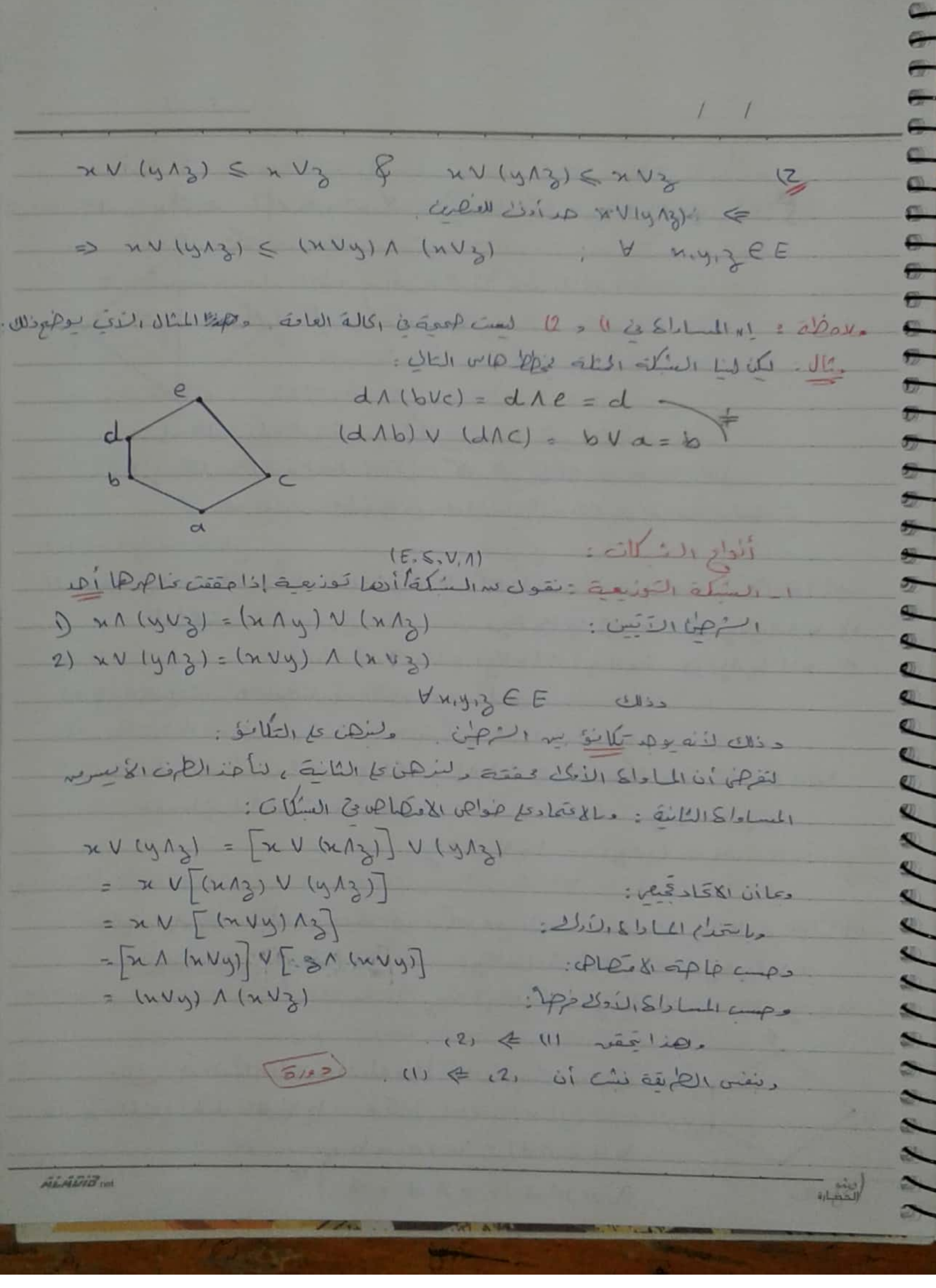
الإثبات: 1)

$x \wedge y \leq x \wedge (y \vee z)$

وأيضاً

$x \wedge z \leq x \wedge (y \vee z)$

$\Rightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$



/ /

2) $x \vee (y \wedge z) \leq x \vee z$ & $x \vee (y \wedge z) \leq x \vee z$

$\Leftarrow$ $x \vee (y \wedge z)$ حد أدنى للعنصرين

$\Rightarrow x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z) \quad ; \quad \forall\ x, y, z \in E$

ملاحظة: إن المساواتين 1) و 2) ليست محققة في الحالة العامة، وهذا المثال الذي يوضح ذلك.

مثال: لتكن لدينا الشبكة المعطاة بمخطط هاس التالي:

$d \wedge (b \vee c) = d \wedge e = d$

$(d \wedge b) \vee (d \wedge c) = b \vee a = b$

$\neq$

أنواع الشبكات: $(E, \leq, \vee, \wedge)$

1- الشبكة التوزيعية: نقول عن الشبكة أنها توزيعية إذا حققت عناصرها أحد الشرطين الآتيين:

1) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

2) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

وذلك $\forall\ x, y, z \in E$

وذلك لأنه يوجد تكافؤ بين الشرطين. ولنبرهن على التكافؤ:

لنفرض أن المساواة الأولى محققة، ولنبرهن على الثانية، لنأخذ الطرف الأيسر من المساواة الثانية: وبالاعتماد على خواص الامتصاص في الشبكات:

$x \vee (y \wedge z) = [x \vee (x \wedge z)] \vee (y \wedge z)$

وبما أن الاتحاد تجميعي: $= x \vee [(x \wedge z) \vee (y \wedge z)]$

وباستخدام المساواة الأولى: $= x \vee [(x \vee y) \wedge z]$

وحسب خاصة الامتصاص: $= [x \wedge (x \vee y)] \vee [z \wedge (x \vee y)]$

وحسب المساواة الأولى فرضاً: $= (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

وهذا يحقق (1) $\Leftarrow$ (2)

وبنفس الطريقة نثبت أن (2) $\Leftarrow$ (1) دورة

أمثلة :

1- المجموعة $X = \{a,b,c\}$. إن الشبكة $(\mathcal{P}(X), \subseteq, \cup, \cap)$ هي شبكة توزيعية .

2- مجموعة الأعداد الطبيعية المرتبة جزئياً وفق علاقة القسمة ، $(\mathbb{N}, \leq, \vee, \wedge)$ هي شبكة توزيعية .

ملاحظات :

1- إن كل شبكة جزئية من شبكة توزيعية هي أيضاً توزيعية .

2- إن كل شبكة ذي علاقة ترتيب كلي هي شبكة توزيعية . مثل :
مجموعة الأعداد الطبيعية مع علاقة الترتيب الطبيعي هي شبكة توزيعية .

نتيجة : من التعريف السابق ، نجد أن الشبكة تكون توزيعية إذا حققت عناصرها أحد المتراجحتين التاليتين ;

1) $x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

2) $x \vee (y \wedge z) \geq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

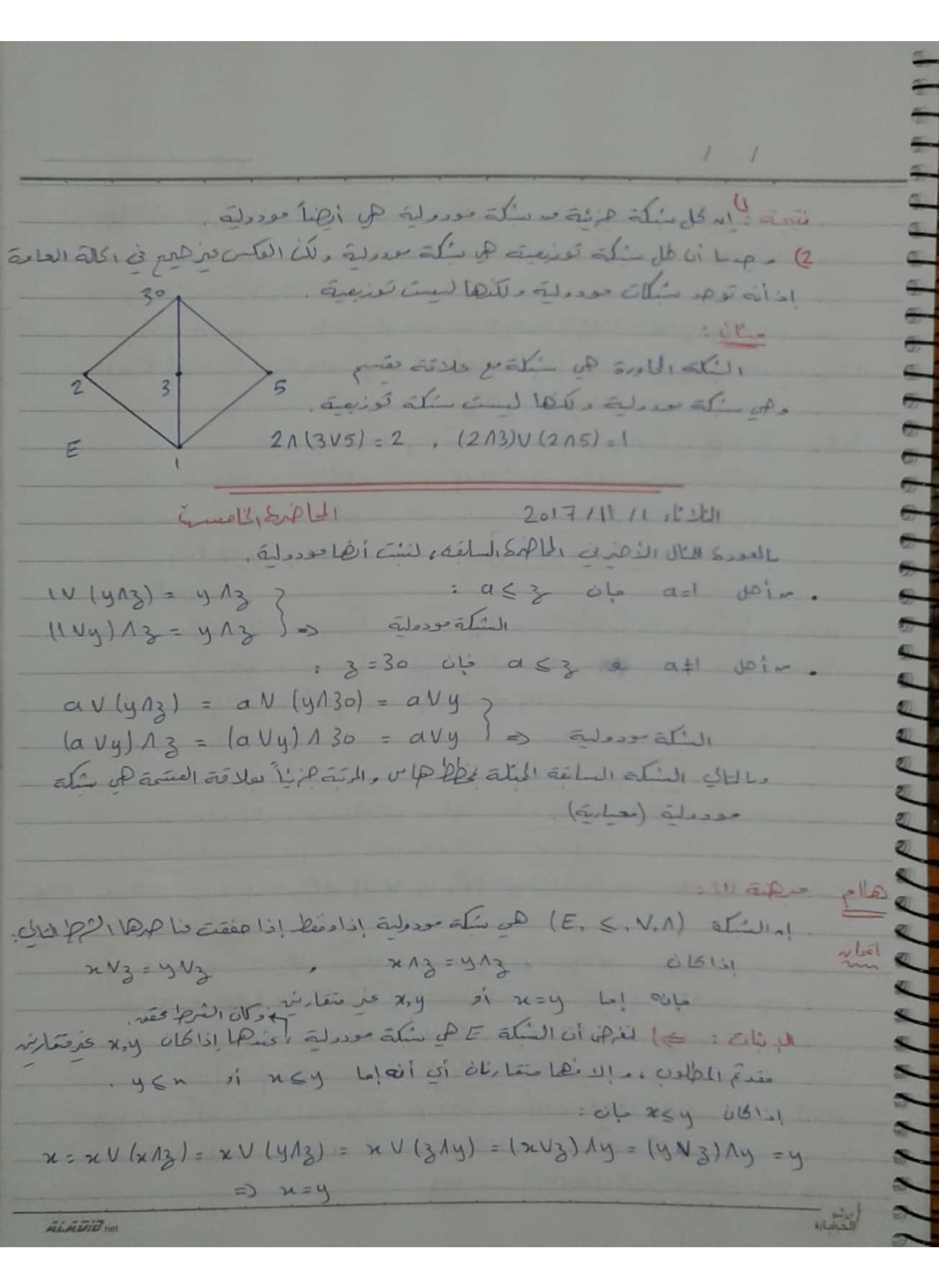
لأن الاتجاه الثاني متحقق دوماً في أي شبكة .

2- الشبكة المودولية : إذا كانت $(E, \leq, \vee, \wedge)$ شبكة ، نقول من E أنها مودولية إذا حققت عناصرها : إذا كان $x \leq z$ فإن
$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$$

نتيجة : إن كل شبكة توزيعية هي شبكة مودولية وذلك لأن إذا كانت E شبكة توزيعية فإن :
$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$
$$x \leq z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$$

مثال : إن الشبكة التالية الممثلة بمخطط هاس ليست مودولية .
لأن : لدينا $b \leq d$ ولكن :

$$\left.\begin{array}{l} b \vee (c \wedge d) = b \vee a = b \\ (b \vee c) \wedge d = e \wedge d = d \end{array}\right\} \neq$$



/ /

نتيجة: 1) إن كل شبكة جزئية من شبكة مودولية هي أيضاً مودولية.

2) وجدنا أن كل شبكة توزيعية هي شبكة مودولية، ولكن العكس غير صحيح في الحالة العامة إذ أنه توجد شبكات مودولية ولكنها ليست توزيعية.

مثال:

الشبكة المجاورة هي شبكة مع علاقة تقسيم وهي شبكة مودولية ولكنها ليست شبكة توزيعية.

$2 \wedge (3 \vee 5) = 2 \quad , \quad (2 \wedge 3) \vee (2 \wedge 5) = 1$

الثلاثاء 11 / 11 / 2017 — **المحاضرة الخامسة**

بالعودة للمثال الأخير في المحاضرة السابقة، لنثبت أنها مودولية.

• من أجل $a = 1$ فإن $a \leq z$:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \vee (y \wedge z) = y \wedge z \\ (1 \vee y) \wedge z = y \wedge z \end{array}\right\} \Rightarrow$$ الشبكة مودولية

• من أجل $a \neq 1$ و $a \leq z$ فإن $z = 30$:

$$\left.\begin{array}{l} a \vee (y \wedge z) = a \vee (y \wedge 30) = a \vee y \\ (a \vee y) \wedge z = (a \vee y) \wedge 30 = a \vee y \end{array}\right\} \Rightarrow$$ الشبكة مودولية

وبالتالي الشبكة السابقة الممثلة بمخطط هاس، والمرتبة جزئياً بعلاقة القسمة هي شبكة مودولية (معيارية).

هام **مبرهنة (1):**

إن الشبكة $(E, \leq, \vee, \wedge)$ هي شبكة مودولية إذا وفقط إذا حققت عناصرها الشرط التالي:

أعطاية إذا كان $x \wedge z = y \wedge z$ ، $x \vee z = y \vee z$

فإنه إما $x = y$ أو x, y غير متقارنين ← وكان الشرط محقق.

الإثبات: ⇐) لنفرض أن الشبكة E هي شبكة مودولية، عندها إذا كان x, y غير متقارنين فقد تم المطلوب، وإلا فهما متقارنان أي أنه إما $x \leq y$ أو $y \leq x$.

إذا كان $x \leq y$ فإن:

$$x = x \vee (x \wedge z) = x \vee (y \wedge z) = x \vee (z \wedge y) = (x \vee z) \wedge y = (y \vee z) \wedge y = y$$

$$\Rightarrow x = y$$

ALAMID.net — أبناء الحضارة